

Teori Dasar Logika (Lanjutan)

Inferensi Logika

- Logika selalu berhubungan dengan pernyataan-pernyataan yang ditentukan nilai kebenarannya.
- Untuk menentukan benar tidaknya kesimpulan berdasarkan sejumlah kalimat yang diketahui nilai kebenarannya
- Metode-metode Inferensi
 - Modus Ponens
 - Modus Tollens
 - Penambahan Disjungtif
 - Penyederhanaan Konjungtif
 - Silogisme Disjungtif
 - Silogisme Hipotesis
 - Dilema
 - Konjungsi

Valid arguments

- *Penalaran Deduktif* : proses untuk mendapatkan kesimpulan (conclusion) q dari proposisi p_1, p_2, \dots, p_n .
- Proposisi p_1, p_2, \dots, p_n disebut premise atau *hypothesis*.
- Semua pernyataan yang mempunyai bentuk:
- If p_1 and p_2 and ... p_n , then q

dikatakan valid jika dan hanya jika (iff) $p_i, i=1, 2, \dots, n$ is true. Dan q juga true

- Selain itu dikatakan invalid

Notasi

- Sebuah argumen adalah deretan dari proposisi² yang ditulis sbb:

$$\begin{array}{l} \bullet p_1 \\ \bullet p_2 \\ \bullet \vdots \\ \bullet \vdots \\ \bullet \vdots \\ \bullet p_n \\ \hline \bullet \neg q \end{array}$$

$p_1, p_2, \dots, p_n =$ hipotesa

$Q =$ conclusion

Valid Argumen

- Untuk mengecek apakah suatu argumen merupakan kalimat yang valid, dapat dilakukan langkah2 sbb :
 - Tentukan hipotesa dan kesimpulan kalimat
 - Buat tabel yang menunjukkan nilai kebenaran untuk semua hipotesa dan kesimpulan
 - Carilah baris kritis yaitu baris di mana semua hipotesa bernilai benar.
 - Dalam baris kritis tersebut, jika semua nilai kesimpulan benar, maka argumen itu valid. Jika diantara baris kritis tersebut ada baris dengan kesimpulan yang salah maka argumen tersebut adalah invalid.

Modus Ponens

- $p \rightarrow q, p \wedge q$

p	q	$p \rightarrow q$	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

- $p \rightarrow q$ and p adalah true maka q juga true
- Sehingga argumen ini valid

Contoh Modus Ponens

- Jika digit terakhir suatu bilangan adalah 0, maka bilangan tersebut habis dibagi 10.
- Digit terakhir suatu bilangan adalah 0
- /Bilangan tersebut habis dibagi 10

Modus Tollens

– $p \rightarrow q$

– $\sim q$

– / $\sim p$

- Contoh :

– Jika Zeus seorang manusia, maka ia dapat mati

– Zeus tidak dapat mati

– / Zeus bukan seorang manusia

Penambahan Disjungtif

- Didasarkan atas fakta bahwa suatu kalimat dapat digeneralisasi dengan penghubung \vee , karena penghubung \vee bernilai benar jika salah satu komponennya benar.

$$\frac{p}{p \vee q} \qquad \frac{q}{p \vee q}$$

- Contoh :
 - Kalimat yang diucapkan Monde, Saya suka jeruk (bernilai benar). Kalimat tersebut akan tetap bernilai benar jika ditambahkan kalimat lain, dengan penghubung \vee . Jadi kalimat “Saya suka jeruk atau durian” tetap bernilai benar dan tidak tergantung pada suka/tidaknya Monde akan durian.

Penyederhanaan Konjungtif

- Merupakan kebalikan dari inferensi Penambahan Disjungtif. Jika beberapa kalimat dihubungkan dengan penghubung \wedge , kalimat tersebut dapat diambil salah satunya secara khusus.
- Penyempitan kalimat ini merupakan kebalikan dari Penambahan Disjungtif yang merupakan perluasan suatu kalimat

$$\frac{- p \wedge q}{- / p}$$

$$\frac{p \wedge q}{/ q}$$

- Contoh :
 - Lina menguasai bahasa Basic and Pascal
 - Lina menguasai bahasa Basic

Silogisme Hipotesis

- Prinsip : sifat transitif pada implikasi. Jika $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow r$ keduanya bernilai benar maka $p \rightarrow r$ bernilai benar pula.
 - $p \rightarrow q$
 - $q \rightarrow r$

 - / $p \rightarrow r$
- Contoh :
 - Jika 18486 habis dibagi 18, maka 18486 habis dibagi 9
 - Jika 18486 habis dibagi 9, maka jumlah digit-digitnya habis dibagi 9.
 - Jika 18486 habis dibagi 18, maka jumlah digit-digitnya habis dibagi 9.

Example

- Let p : I study hard, q : I get A's, r : I get rich
- Now, consider this argument:

if I study hard, then I get A's

if I don't get rich, then I don't get A's

\ I get rich

- First, formulate it
- Next, determine whether it's valid

...Example

- p : I study hard, q : I get A's, r : I get rich

if I study hard, then I get A's

if I don't get rich, then I don't get A's

\neg I get rich

- Formulating:

$p \rightarrow q$

$\neg r \rightarrow \neg q$

$\neg r$

...Example

- p : I study hard, q : I get A's, r : I get rich

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim r \rightarrow \sim q \\ \hline \end{array}$$

$\backslash r$

- If the argument is valid, then whenever $p \rightarrow q$ and $\sim r \rightarrow \sim q$ are true, r must be also true
- Construct a truth table and see if such propositions hold

...Example

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim r \rightarrow \sim q$	r
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

- Note that when both hypotheses are true, the consequence is false
- The argument is therefore invalid

Another Example (from book)

- Let $p: 2 = 3$, $q: \text{I ate my hat}$
- Now, consider this argument:

if $2 = 3$, then I ate my hat
I ate my hat

 $\neg 2 = 3$

- So we have:
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \neg p \end{array}$$

...Another Example

p	q	p → q	p
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

- $$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \neg p \end{array}$$

- Inspect the third row: hypotheses are true but conclusion is false, thus argument is invalid
- Another way by avoiding truth table. If argument is valid, then whenever $p \rightarrow q$ and q are both true, p must also be true. Suppose both hypotheses are true. This is possible if p is false and q is true. In this case, p , the conclusion, is not true. Thus, argument is invalid

Rules of inference (1)

- 1. Law of *detachment* or *modus ponens*
 - $p \rightarrow q$
 - p
 - Therefore, q
- 2. *Modus tollens*
 - $p \rightarrow q$
 - $\sim q$
 - Therefore, $\sim p$

Rules of inference (2)

- 3. Rule of *Addition*
 - p
 - Therefore, $p \vee q$
- 4. Rule of *simplification*
 - $p \wedge q$
 - Therefore, p , or
 - Therefore, q . Why?
- 5. Rule of *conjunction*
 - p
 - q
 - Therefore, $p \wedge q$

Rules of inference (3)

- 6. Rule of *hypothetical syllogism* (I know it as transitivity)
 - $p \rightarrow q$
 - $q \rightarrow r$
 - Therefore, $p \rightarrow r$
- 7. Rule of *disjunctive syllogism*
 - $p \vee q$
 - $\sim p$
 - Therefore, q

Contoh :

- Pada suatu hari ini, Anda pergi ke kampus dan baru sadar bahwa Anda tidak memakai kacamata. Setelah mengingat-ingat, ada beberapa fakta yang Anda pastikan kebenarannya :
 - Jika kacamataku ada di meja dapur, maka aku pasti sudah melihatnya ketika sarapan pagi
 - Aku membaca koran di ruang tamu atau aku membacanya di dapur
 - Jika aku membaca koran di ruang tamu, maka pastilah kacamata kuletakkan di meja tamu
 - Aku tidak melihat kacamataku pada waktu sarapan pagi
 - Jika aku membaca buku di ranjang, maka kacamata kuletakkan di meja samping ranjang.
 - Jika aku membaca koran di dapur, maka kacamataku ada di meja dapur.

Contoh :

- P : kacamataku ada di meja dapur
- Q : Aku melihat kacamataku ketika sarapan pagi
- R : Aku membaca koran di ruang tamu
- S : Aku membaca koran di dapur
- T : kacamata kuletakkan di meja tamu
- U : Aku membaca buku di ranjang
- W : kacamata kuletakkan di meja samping ranjang
- Dengan simbol2 tersebut maka fakta2 diatas dapat ditulis sbb :
 - $P \rightarrow Q$
 - $R \vee S$
 - $R \rightarrow T$
 - $\sim Q$
 - $U \rightarrow W$
 - $S \rightarrow P$

Inferensi

- $P \rightarrow Q$

- $\sim Q$

- $\therefore \sim P$ (Modus Tollens)

- $S \rightarrow P$

- $\sim P$

- $\therefore \sim S$ (Modus Tollens)

- $R \vee S$

- $\sim S$

- $\therefore R$ (Silogisme Disjungtif)

- $R \rightarrow T$

- R

- $\therefore T$ (Modus Ponens)

Kesimpulan : Kacamata ada di meja tamu

Contoh :

- Buktikan kevalidan argumen di bawah ini !

- $P \wedge Q$

- $(P \vee Q) \rightarrow R$

- $\neg R$

- **Penyelesaian**

- $P \wedge Q$

- $\neg P$ Penyederhanaan Konjungtif

- P

- $\neg P \vee Q$ Penambahan Disjungtif

- $(P \vee Q) \rightarrow R$

- $(P \vee Q)$

- $\neg R$ Modus Ponens

Predikat & Kuantifier

Predikat & Kuantifier

- Pernyataan “ $x > 3$ ” punya 2 bagian, yakni “ x ” sebagai subjek dan “ adalah lebih besar 3” sebagai **predikat P (Fungsi Proposisi)**.
- Kita dpt simbolkan pernyataan “ $x > 3$ ” dengan $P(x)$. Sehingga kita dapat mengevaluasi nilai kebenaran dari $P(4)$ dan $P(1)$.
- “ $P(x)$ benar untuk **semua** nilai x dalam **domain** pembicaraan” ditulis
- $\forall x P(x)$.

Predikat

- $P(x) = X - 3 > 5$

Apa nilai kebenaran dari $P(2)$? **false**

Apa nilai kebenaran dari $P(8)$? **false**

Apa nilai kebenaran dari $P(9)$? **true**

Predikat

- Misal terdapat Fungsi Proposisi $Q(x, y, z)$ yang didefinisikan sbb : $x + y = z$.
- Disini Q adalah predikat dan x, y dan z adalah variabel

Apa nilai kebenaran dari $Q(2, 3, 5)$? **true**

Apa nilai kebenaran dari $Q(0, 1, 2)$? **false**

Apa nilai kebenaran dari $Q(9, -9, 0)$? **true**

Predikat & Kuantifier

- **Soal.** Tentukan nilai kebenaran $\forall x (x^2 \geq x)$ jika x bilangan bulat.
- Untuk menunjukkan $\forall x P(x)$ **salah** cukup dengan hanya menunjukkan/mencari **satu** nilai x dalam **domain** shg $P(x)$ **salah**. Nilai x tersebut selanjutnya dikatakan **counter-example** dari pernyataan $\forall x P(x)$.

Soal

- Dengan domain himp bil real
- Apakah nilai kebenaran dari $\forall x P(x)$, dimana $P(x)$ adalah $x^2 \geq 0$?
 - $\forall x P(x)$ benar karena untuk setiap bilangan real x , kalau dikuadratkan akan bernilai positif atau nol.
- Apakah nilai kebenaran pernyataan $\forall x P(x)$ dimana $P(x)$ adalah $x^2 - 1 > 0$
 - salah karena jika $x = 1$, proposisi $1 - 1 > 0$ salah. Karena terdapat satu nilai pada daerah Domain yang salah maka pernyataan kuantor universal $\forall x, x^2 - 1 > 0$ adalah salah.

Benar atau Salah ?

- Apakah nilai kebenaran dari $\forall n P(n)$, dimana $P(n)$ jika n genap maka $n^2 + n + 19$ adalah bil prima. n adalah bilangan bulat positif
- Jawab : Salah
- Misal $n = 38$
- Maka $38 * 38 + 38 + 19 = 19(2*38 + 2 + 1) = 19 * 79$ (Bukan bilangan prima)

Benar atau Salah ?

- Untuk setiap bilangan real x , jika $x > 1$ maka $x + 1 > 1$ ($p \rightarrow q$)
- Jawab : Benar
- Harus dibuktikan bahwa jika $x > 1$ maka $x + 1 > 1$ untuk setiap bil real x
- Ingat tabel kebenaran untuk implikasi.
- Jika $x > 1$ (B) maka $x + 1 > 1$ akan bernilai Benar

Predikat & kuantifier

- “Ada nilai x dalam **domain pembicaraan** sehingga $P(x)$ bernilai benar” ditulis $\exists x P(x)$.
- $\exists x P(x)$ dapat diartikan :
 - Hanya ada satu x sedemikian sehingga $P(x)$ bernilai benar
 - Ada minimal satu x sedemikian sehingga $P(x)$ bernilai benar
- **Soal.** Tentukan nilai kebenaran dari $\exists x P(x)$ bila $P(x)$ menyatakan “ $x^2 > 12$ ” dan **domain pembicaraan meliputi semua bilangan bulat positif tidak lebih dari 4.**

Soal

- Apakah nilai kebenaran dari $\exists x P(x)$ dimana $P(x)$ adalah $x/(x^2+1) = 2/5$?
- $\exists x P(x)$ bernilai benar. Cari paling sedikit satu bil real yang benar. Misal $x = 2$

Soal

- $P(x)$ menyatakan $x > 3$. $\exists x P(x)$?

$$D = \{\text{real}\}$$

- $P(x)$ $x = x + 1$. $\exists x P(x)$?

$$D = \{\text{real}\}$$

- $P(x)$ menyatakan $x^2 > 10$. $\exists x P(x)$?

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

Soal

- $P(x)$ menyatakan $x > 3$. $\exists x P(x)$?

$$D = \{\text{real}\}$$

True , misal $x = 4$ maka $4 > 3$

- $P(x)$ $x = x + 1$. $\exists x P(x)$?

$$D = \{\text{real}\}$$

False karena setiap x bernilai salah

- $P(x)$ menyatakan $x^2 > 10$. $\exists x P(x)$?

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

True karena $4^2 > 10$

Kuantifier

Pernyataan	Kapan Benar ?	Kapan Salah ?
$\forall x P(x).$	P(x) benar untuk setiap x	Ada sebuah nilai x dimana P(x) bernilai salah
$\exists x P(x)$	Ada sebuah x sehingga P(x) bernilai benar	P(x) salah untuk setiap x

Negasi

- “Setiap mhs dalam kelas ini telah mengambil Kalkulus I” $[\forall x P(x)]$ ($P(x)$ adalah x yang telah mengambil Kalkulus)
- **negasi** dari pernyataan ini....?
- Tidak semua mhs dalam kelas ini yang telah mengambil Kalkulus \exists
- “Ada seorang mhs dalam kelas ini belum mengambil Kalkulus I” $[\exists x \neg P(x)]$
- Jadi, $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$.

Negasi

Pernyataan	Negasi
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x).$
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$

Negasi

- **Soal Carilah negasi dari pernyataan berikut:**
 - \forall bilangan prima x , x adalah bilangan ganjil.
 - Tidak ada politikus yang jujur.
 - Beberapa hacker usianya lebih dari 40 tahun
- **Solusi**
 - \exists bilangan prima x , maka x bukan bilangan ganjil
 - \exists politikus x , maka x adalah orang yang jujur atau dalam statement informal : Beberapa politikus bersifat jujur.
 - Tidak ada hacker yang usianya lebih dari 40 tahun atau Semua hacker usianya 40 tahun atau kurang dari itu.

Multiply Quantified Statement

- Terdapat $P(x,y)$ yang menyatakan $x+y = y+x$. Apakah nilai kebenaran dari Kuantifier $\forall x \forall y P(x,y)$?
- $\forall x \forall y P(x,y)$ menyatakan proposisi “Untuk semua bil real x dan untuk semua bil real y memenuhi $x+y = y+x$ ”
- Karena $P(x,y)$ true untuk semua bil real x dan untuk semua bil real y memenuhi $x+y = y+x$ ” maka $\forall x \forall y P(x,y)$ adalah true
- $\exists y \forall x P(x,y)$? Salah
- Untuk satu bil real y sedemikian sehingga terdapat semua bil real x sehingga $Q(x,y)$ benar
- (Tidak masalah berapapun nilai y yang diambil, tetapi hanya ada satu nilai x)

Soal

- Terdapat $Q(y)$ menyatakan “ $x + y = 0$ ”. Apakah nilai kebenaran dari $\exists y \forall x Q(x,y)$ dan $\forall x \exists y Q(x,y)$?
- $\exists y \forall x Q(x,y)$
 - “There is a real number y such that for every real number x , $Q(x,y)$ is true”
- No matter what value of y is chosen, there is only one value of x for which $x + y = 0$. Since there is no real number y such that $x + y = 0$ for all real number x , the statement $\exists y \forall x Q(x,y)$ is false

Soal

- $\forall x \exists y Q(x,y)$
 - “For every real number x there is a real number y such that $Q(x,y)$ is true”
- Given a real number x , there is a real number y such that $x + y = 0$; namely $y = -x$
- Hence the statement $\forall x \exists y Q(x,y)$ is true

De Morgan's laws

- $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
- $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
- $\sim(\forall x P(x)) \leftrightarrow \exists x: \sim P(x)$
- $\sim(\exists x P(x)) \leftrightarrow \forall x: \sim P(x)$
- $\sim (=, \sim=) \leftrightarrow (\sim=, =)$
- $\sim (<, \leq, >, \geq) \leftrightarrow (\geq, >, \leq, <)$

Quantifier dua variabel

- $\forall x \forall y P(x,y) ; \forall y \forall x P(x,y)$
 - True : $P(x,y)$ benar untuk setiap pasangan x dan y
 - False : Terdapat satu pasang x,y pada $P(x,y)$ yang bernilai salah.
- $\forall x \exists y P(x,y)$
 - True : Untuk tiap x terdapat satu y sehingga $P(x,y)$ benar
 - False : Terdapat satu x sedemikian sehingga $P(x,y)$ salah untuk setiap y

Quantifier dua variabel

- $\exists x \forall y P(x,y)$
 - True : Terdapat satu x yang mana P(x,y) benar untuk tiap y
 - False : Untuk setiap x terdapat satu y sehingga p(x,y) salah
- $\exists x \exists y P(x,y) \exists y \exists x P(x,y)$
 - True : Terdapat satu pasang x,y sehingga P(x,y) benar
 - False : P(x,y) adalah salah untuk setiap pasang x,y

Soal

- Apakah $(\sim q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \sim p$ adalah tautology ?
- Tunjukkan bahwa $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ dan $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ tidak ekuivalen
- Gunakan prinsip inferensi untuk menurunkan $\sim s$ dari hipotesa :
 - $(s \vee q) \rightarrow p$
 - $\sim a$
 - $p \rightarrow a$

Soal

- Terdapat $P(x)$ = “the word x contains the letter a”. Apa nilai kebenarannya ?
 - $P(\text{orange})$
 - $P(\text{lemon})$
 - $P(\text{true})$
 - $P(\text{false})$
- $P(x)$ adalah $x = x^2$, apa nilai kebenaran msg2 di bawah ini?
 - $P(0)$
 - $P(1)$
 - $P(2)$
 - $P(-1)$
 - $\exists x P(x)$
 - $\forall x P(x)$

Soal

- Tentukan nilai kebenaran masing2 statement di bawah ini !
Dengan domain bilangan bulat.
 - $\forall n(n^2 \geq 0)$
 - $\exists n(n^2 = 2)$
 - $\forall n(n^2 \geq n)$
 - $\forall n \exists m(n^2 < m)$
 - $\exists n \forall m(n < m^2)$
 - $\forall n \exists m(n + m = 0)$
 - $\exists n \forall m(nm = m)$
 - $\exists n \exists m(n^2 + m^2 = 5)$